ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XIV Сем. № 164. № 8.

Содержаніе: Заявленіе редакціи.—Старое и новое о нѣкоторыхъ простѣйшихъ физическихъ явленіяхъ. Засл. проф. *Н. Е. Любимова.*—Отвѣтъ на тему № 4. *А. Евсигнеева.*—Нѣсколько словъ по поводу открываемыхъ въ Одессѣ физико-математическихъ курсовъ. *М. Попруженко.*—Научная хроника. *В. Г.*—Разныя извѣстія.—Задачи №№ 477—483.—Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 361, 362, 363, 364, 365 и 366.—Справ. табл. № XV.—Библіографическій листокъ новѣйшихъ русскихъ изданій.—Библіографическій листокъ новѣйшихъ нѣмецкихъ изданій.

Заявленіе редакціи.

Стремясь давно къ удовлетворенію одной изъ потребностей нашихъ школьныхъ сферъ и возникающему уже въ Россіи спросу на *любительскіе физическіе кабинеты* и лабораторіи, редакція «Вѣстника Опытной Физики», покончивъ съ хлопотами, вызванными перенесеніемъ изданія изъ Кіева въ Одессу, считаетъ возможнымъ приступить теперь къ осуществленію намѣченной цѣли, и симъ заявляетъ, что, ради облегченія своимъ подписчикамъ и читателямъ пріобрѣтенія физическихъ приборовъ и принадлежностей, годныхъ какъ для физическихъ кабинетовъ учебныхъ заведеній, такъ и для спеціалистовъ и любителей, она вошла въ сношенія съ вновь открытой въ Одессѣ

МАСТЕРСКОЙ ФИЗИЧЕСКИХЪ ПРИБОРОВЪ

кандидата физико-математическихъ наукъ

Н. Завадскаго и К°

и впредь будетъ принимать заказы на всевозможные приборы и принадлежности, въ этой мастерской изготовляемые, по общедоступнымъ цѣнамъ, указаннымъ въ каталогахъ, которые послѣдовательно будутъ помѣщены на обложкахъ журнала, начиная съ настоящаго № 164.

Полный каталогъ будетъ въ свое время разосланъ всѣмъ подписчикамъ въ видѣ приложенія.

При изготовленіи типическихъ приборовъ, предназначаемыхъ для физическихъ кабинетовъ среднихъ учебныхъ заведеній, мастерская будетъ руководствоваться результатами трудовъ коммиссіи, составленной

изъ членовъ Новороссійскаго Физико-Математическаго Общества для всесторонняго обсужденія вопроса о составѣ нормальныхъ физическихъ кабинетовъ, подъ предсѣдательствомъ профессора Ѳ. Н. Шведова.

Труды упомянутой коммиссіи будутъ своевременно опубликованы въ «Вѣстникѣ Оп. Физики».

Всѣ подписчики «Вѣстника Оп. Физики» (какъ вносящіе полную подписную плату — 6 руб., такъ и льготные — 4 руб.) пользуются при заказахъ уступкою 5% съ цѣнъ, указанныхъ въ каталогахъ.

Заказы отъ учебныхъ заведеній исполняются согласно оффиціальнымъ заявленіямъ начальниковъ сихъ заведеній. Заказы отъ частныхъ лицъ исполняются по полученіи отъ нихъ не менѣе половины стоимости заказа впередъ.

Укупорка и пересылка считаются по дѣйствительной стоимости.

Починка физическихъ приборовъ и обмѣнъ испорченныхъ на новые производятся по соглашенію.

При спеціальныхъ заказахъ на изготовленіе приборовъ, въ каталогахъ не поименованныхъ, должны быть точно указаны размѣры и приложены пояснительные чертежи и рисунки.

При запросахъ, требующихъ отвѣта, должна быть прилагаема почтовая марка.

Вмѣстѣ съ симъ редакція «Вѣстника Оп. Физики» заявляетъ о перемѣнѣ своего прежняго городского адреса: «Нѣжинская № 18» на новый: «*Княжеская № 11*». Адресъ для корреспонденціи остается прежній: „*г. Одесса, Редакція Вѣстника Оп. Физики*“.

Редакторъ-Издатель *Э. К. Шпачинскій.*

Старое и новое о нѣкоторыхъ простѣйшихъ физическихъ явленіяхъ *).

ДАВЛЕНІЕ ВОЗДУХА.

Глава первая.

Старое.

I.

Въ курсахъ и трактатахъ физики, не только краткихъ, но и обширныхъ, можно замѣтить почти пренебрежительное, и во всякомъ случаѣ крайне невнимательное отношеніе къ исторіи этой науки. Послѣдствіемъ является пренебреженіе, въ погонѣ за новизною, къ вопросамъ, которые по элементарности своей кажутся исчерпанными, общеизвѣстными, утратившими интересъ, какой имѣли въ своемъ прошломъ. Это, по мнѣнію моему, большой недостатокъ, вліяющій и на общее образо-

(*) Настоящая статья засл. проф. *Любимова*, предназначенная для „Журнала Мин. Нар. Просв.“, печатается, съ согласія автора, въ нашемъ журналѣ съ нѣкоторыми сокращеніями, соотвѣтственно сдѣланному имъ сообщенію въ засѣданіи Мат. Отд. Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей 14 Мая 1893 года. *Прим. ред.*

ваніе молодыхъ людей, изъ которыхъ должны выработаться будущіе физики. Цѣль, къ которой стремится каждый изслѣдователь, есть открытіе—въ области-ли фактовъ или въ области теоріи и системы—чего-либо новаго, оставшагося неизвѣстнымъ предшественникамъ. Но научить дѣлать открытія нельзя. Открытія достигаются разнообразными путями и для нихъ нѣтъ предуставленной логики. И однако логика эта есть: она вся въ ихъ исторіи. И ничто такъ не поучительно въ исканіи новыхъ умозаключеній, какъ близкое знакомство съ умозаключеніями прошедшаго, чрезъ которыя создался научный капиталъ, нынѣ находящійся въ обладаніи человѣчества. Знаменитый академикъ Беръ въ своей автобіографіи, указавъ на то обстоятельство, что геніальныя способности великихъ ученыхъ обыкновенно обнаруживаются уже въ молодости—около 25 лѣтъ,—замѣчаетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что геніальность эта выражается главнымъ образомъ въ проницательной способности усмотрѣть лакуны, пробѣлы въ наукѣ, которыя надлежитъ и можно пополнить новыми изысканіями. Но именно чрезъ историческое знаніе движенія науки, болѣе чѣмъ чрезъ что-либо, достигается ширина воззрѣнія, дозволяющая усматривать рѣшенное и не рѣшенное, возбужденное, задуманное, оставленное. Историческое знаніе освобождаетъ отъ рутины заучиванія на память и отъ близорукаго пониманія, помощью которыхъ главнымъ образомъ усвояется догматическое изложеніе положеній науки въ нынѣшнемъ ея состояніи, и чрезъ которыя порождается некритическое отношеніе къ дѣлу. И рутина памяти, то-есть заучиваніе чрезъ простое повтореніе, и уразумѣніе дѣла на ближнемъ разстояніи необходимы, но ограничить себя ихъ стѣною значитъ отказаться отъ производительности творческаго размышленія. А переходя чрезъ нее, не зная прошлаго, можно открыть Америку, не догадываясь, что она открыта.

Что касается общаго естественно-историческаго образованія, то здѣсь пренебреженіе исторіей ведетъ къ результату, который можно назвать печальнымъ. Чрезъ умъ учащагося не проводятся величайшія умозаключенія, доставившія богатства современнаго знанія. Воспитательная для ума сила естествовѣдѣнія, заключающаяся въ школѣ опыта (школа эта въ смыслѣ экспериментальныхъ методическихъ занятій самихъ учащихся находится едва въ зародышѣ), логикѣ открытій и логикѣ доказательствъ остается безъ примѣненія. Укажу рѣзкій примѣръ. Всеобщее тяготѣніе Ньютона есть величайшее изъ открытій. Гдѣ же у насъ учащійся знакомится съ тѣми посылками, чрезъ которыя ученіе это достигнуто и безъ знанія которыхъ нельзя и уразумѣть научнаго значенія ньютоніанскаго притяженія въ смыслѣ дѣйствія на разстояніи, составляющаго основу всей нынѣшней механики природы. Въ гимназическое преподаваніе физики оно обыкновенно не вводится. Въ курсѣ космографіи, на которую едва отдѣлялся до послѣдняго времени одинъ урокъ въ полугодіе въ послѣднемъ классѣ, о немъ упоминается почти мимоходомъ. Въ университетскомъ курсѣ на отдѣленіи естественныхъ наукъ астрономія не преподается. Такимъ образомъ, возможно, что молодой естествоиспытатель, можетъ быть геологъ,—не говоря уже о медикѣ—окончитъ университетскій курсъ, если самъ не пополнитъ пробѣла, со свѣдѣніями о строеніи вселенной, мало превышающими свѣ-

дѣнія гимназиста второго класса, выучившаго начатки географіи. Даже въ курсахъ астрономіи на математическомъ отдѣленіи иногда законъ Ньютона принимается какъ извѣстный изъ физики и не выводится. Такъ поступлено, напримѣръ, въ довольно обширномъ курсѣ астрономіи, изданномъ однимъ изъ провинціальныхъ профессоровъ этой науки. Въ умѣ учащагося воздвигается зданіе не имѣющее фундамента.

Въ послѣднее время пренебреженіе къ исторіи науки начинаетъ, впрочемъ, уменьшаться. Въ Германіи вышло нѣсколько почтенныхъ трактатовъ по исторіи физики; появляются въ переводѣ изданія классиковъ естествовѣдѣнія, какъ напримѣръ, нѣкоторыя сочиненія Галилея. Мимоходомъ позволю себѣ замѣтить, что уже двадцать лѣтъ тому назадъ, при составленіи моего курса физики, я имѣлъ въ виду дать надлежащее мѣсто историческому элементу въ учебномъ изложеніи науки. Трудъ мой не нашелъ оцѣнки, или, если и нашелъ, то развѣ между учащимися—кому изъ нихъ случалось имѣть его въ рукахъ,—находившими способъ изложенія легко понимаемымъ и интереснымъ.

Тѣсно связанное съ пренебреженіемъ исторіи недостаточное вниманіе къ изложенію элементарныхъ частей, какъ общеизвѣстныхъ, не довольно возбуждающихъ интересъ въ излагающемъ, въ свою очередь, важный недостатокъ. Въ томъ, что представляется повидимому исчерпаннымъ и слишкомъ извѣстнымъ, но рѣдко обнаруживаются стороны неожиданныя, ставящія въ новомъ свѣтѣ то, что казалось переизвѣстнымъ. Элементарныя части суть основа науки. Для начинающаго онѣ—неоткрытая еще Америка. Его умъ долженъ внимательно и долго останавливаться на элементахъ, чтобы ихъ дѣйствительно усвоить себѣ. Если перескочить чрезъ нихъ, то все знаніе будетъ неосновательное. Самое трудное дѣло не развитіе доказательствъ, а уразумѣніе сути дѣла, усвоеніе началъ. Вообще, убійственный способъ составленія учебниковъ чрезъ переписку рутинныхъ вещей и перефразировку трехъ, четырехъ новыхъ книжекъ въ ту форму, въ какой содержаніе ихъ уложилось въ головѣ составителя, безъ всякой связи съ первоисточниками, главнымъ образомъ происходитъ отъ незнакомства съ исторіею науки, лишающаго составителей ширины и свободы воззрѣнія. Относительно рутинной переписки припомню указанную мною въ семидесятыхъ годахъ грубую ошибку въ ученіи о галилеевой трубкѣ, возникшую изъ перевиранія одного изъ положеній Ламберта, (опредѣлявшаго поле зрѣнія трубки подъ условіемъ одинакой яркости при зрѣніи чрезъ трубку и простымъ глазомъ (Nouv. Mém. de L'Acad. de Berlin, 1771) и сто лѣтъ переходившую изъ книги въ книгу.

II.

Пренебреженіе къ исторіи въ вопросѣ, составляющемъ предметъ настоящей статьи, выразилось весьма оригинальнымъ образомъ. Тогда какъ обыкновенно историческія свѣдѣнія опускаются, главу объ атмосферномъ давленіи, какъ исключеніе, принято было излагать исторически. Весьма обычно начинать разсказомъ о флорентійскомъ насосѣ, показанномъ Галилею, и приводить опытъ Торричелли, какъ наиболѣе элементарное доказательство давленія атмосфернаго воздуха. Но тутъ уже исторія наказала за испытываемое ею пренебреженіе. Уступленная

ей глава оказалась именно тою, гдѣ историческое изложеніе наименѣе пригодно для яснаго усвоенія предмета, такъ какъ исторія въ этомъ вопросѣ шла весьма непрямымъ путемъ, и опытъ Торричелли, который долженъ быть элементарно доказательнымъ для учениковъ, ученымъ его времени вовсе не представлялся, какъ доказывающій давленіе воздуха. Въ новыхъ руководствахъ обыкновенно предпочитаютъ главу о давленіи воздуха начинать съ болѣе наглядныхъ опытовъ, какъ прорываніе пузыря, магдебургскія полушарія и т. п., требующихъ для производства своего воздушнаго насоса. Тутъ свое неудобство: воздушный насосъ еще неизвѣстенъ учащемуся, такъ какъ не былъ и не могъ еще быть объясненъ. Какъ можно устранить это неудобство, увидимъ ниже, а теперь перейдемъ къ указанію неточностей въ историческомъ изложеніи ученія о давленіи воздуха.

Въ классическомъ сочиненіи Біо „Traité de physique expérimentale et mathématique" (1816, T. I, 69) читаемъ: „Однажды флорентинскіе колодезники, построивъ очень длинный насосъ съ намѣреніемъ поднять воду на болѣе значительную высоту, чѣмъ какъ дѣлалось прежде, замѣтили, что вода поднялась въ насосѣ на высоту около 32-хъ футовъ, но рѣшительно не хотѣла подняться выше, сколько бы ни продолжали качать. Удивленные этимъ обстоятельствомъ, они пошли посовѣтоваться къ Галилею, который сказалъ имъ, подсмѣиваясь надъ ними (en se moquant d'eux), что, повидимому, природа боится пустоты только до высоты 32 футовъ! Философъ уже усматривалъ, что это явленіе, какъ подобныя ему, было простымъ механическимъ послѣдствіемъ тяжести воздуха. Но вѣроятно онъ не установилъ еще своихъ идей о столь новомъ тогда предметѣ и предпочелъ спасовать предъ колодезниками, чѣмъ рискнуть сообщить свой секретъ. Онъ и умеръ, не сдѣлавъ его извѣстнымъ".

Пулье въ своемъ курсѣ физики (7-me ed. Paris 1856, I, III), разсказавъ случай съ флорентинскимъ насосомъ, замѣчаетъ: „въ ту эпоху поднятіе жидкости объясняли тѣмъ, что природа боится пустоты и толкаетъ жидкость, чтобы таковую пополнить. Но объясненіе помощью тайныхъ причинъ (causes occultes) не было изъ такихъ, какими могъ бы удовлетвориться Галилей: какъ только онъ узналъ о фактѣ, замѣченномъ колодезниками, онъ предположилъ, что истинная его причина есть тяжесть воздуха". Все это исторически не точно. Галилей объяснялъ явленіе поднятія жидкости въ насосъ не тяжестью воздуха (хотя изъ опыта зналъ, что воздухъ имѣетъ вѣсъ), а боязнью пустоты и вовсе не въ шутку считалъ боязнь эту силою, имѣющею опредѣленный предѣлъ. Разсказъ о случаѣ съ насосомъ переданъ самимъ Галилеемъ въ „Разговорахъ о механическихъ ученіяхъ". Вотъ что говоритъ въ первый день Разговоровъ одинъ изъ собесѣдниковъ *).

„*Сагредо*. Я радъ, что бесѣда наша позволяетъ мнѣ найти причину одного явленія, которое долгое время казалось мнѣ чудеснымъ и необъяснимымъ. Я видѣлъ разъ цистерну, въ которой, чтобы доставать

*) „Discorsi e demonstrazioni matemathice intorno e due nuove scienze". Въ 1890 году вышелъ нѣмецкій переводъ „Разговоровъ", сдѣланный проф. Эттингенъ въ изданіи: „Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften".

изъ нея воду, поставили насосъ, думая, но напрасно, съ меньшимъ трудомъ подымать то же или большее количество воды, чѣмъ обыкновенными ведрами. Насосъ этотъ имѣлъ свой поршень и клапанъ сверху, такъ что вода подымалась притяженіемъ (всасываніемъ), а не нагнетаніемъ, какъ бываетъ въ насосахъ, у которыхъ приборъ снизу *). Насосъ, пока вода въ цистернѣ стояла на опредѣленной высотѣ, тянулъ ее обильно; но когда вода опускалась ниже извѣстнаго предѣла — не дѣйствовалъ болѣе. Я подумалъ, когда въ первый разъ увидѣлъ такой случай, что механизмъ былъ испорченъ и когда нашелъ мастера, чтобъ его исправить, то онъ сказалъ мнѣ, что тутъ нѣтъ никакого недостатка, и причина въ водѣ, которая, опустившись слишкомъ низко, не выносила поднятія на такую высоту; и онъ прибавилъ мнѣ, что ни насосами, ни иною какою машиной, которая бы подымала воду притяженіемъ, невозможно заставить ее подняться ни на волосъ болѣе 18 приблизительно локтей (около 10 метровъ). Будетъ ли насосъ широкій или узкій—это во всякомъ случаѣ предѣлъ высоты".

„До сихъ поръ я не догадывался, что, подобно тому какъ веревка, деревянный шестъ или жестяной прутъ, будучи болѣе и болѣе удлиняемы, могутъ быть доведены до такой длины, что наконецъ ихъ разорветъ собственный ихъ вѣсъ, съ еще большею легкостью тоже можетъ случиться со столбомъ воды. Ибо, что иное притягивается въ насосѣ, какъ не цилиндръ воды, который имѣетъ прикрѣпленіе сверху и, удлиняясь болѣе и болѣе, наконецъ доходитъ до того предѣла, далѣе котораго уже разрывается своимъ вѣсомъ, какъ если бы то была веревка".

Чрезъ нѣсколько лѣтъ („Разговоры" появились въ 1638 году, опытъ Торричелли сдѣланъ въ 1643 г.), Торричелли придумалъ свой опытъ надъ поднятіемъ въ трубкѣ ртути вмѣсто воды. И замѣчательная вещь! Экспериментальныя средства и привычка къ опытамъ были такъ мало распространены въ ту эпоху, что задумавъ опытъ, для осуществленія котораго такъ немного требуется: стеклянная трубка, чашка и нѣсколько ртути, Торричелли самъ его не исполнилъ, а, какъ сказано въ предисловіи къ его чтеніямъ Lezioni academiche, Florence, 1715), „сообщилъ свои соображенія Винченцо Вивіани, который и былъ первый, кто сдѣлалъ этотъ важный опытъ и могъ ясно видѣть удивительное явленіе, предсказанное Торричелли"; самъ Торричелли понималъ истинную причину явленія. Въ іюнѣ 1644 года онъ писалъ своему другу и ученику Риччи въ Римъ: „Я разсуждаю такъ: если я усматриваю явную причину сопротивленія, испытываемаго, когда хочу сдѣлать пустоту, то безполезно, кажется мнѣ, приписывать пустотѣ дѣйствіе, очевидно происходящее отъ иной причины. Сдѣлавъ нѣкоторыя весьма нетрудныя вычисленія, я нахожу, что причина, о которой говорю, а

*) Заслуживаетъ вниманія это указаніе Галилея. У насъ, какъ и всюду, въ учебникахъ физики трактуется о насосѣ Галилея. Но не задается вопроса, какое было устройство этого насоса. Естественно, что учащійся представляетъ себѣ этотъ инструментъ въ той формѣ, какъ насосъ употребляется въ нашихъ колодцахъ. Но наши насосы изъ глубокихъ колодцевъ нерѣдко подымаютъ воду выше 32 футовъ. Что же значитъ, что насосамъ нельзя поднять воду выше этого предѣла? Наши насосы изъ высокаго древеснаго ствола съ длиннымъ поршнемъ и примитивными кожаными клапанами нигдѣ, кажется, даже и не описаны.

именно вѣсъ воздуха, долженъ одинъ произвести больше дѣйствія, чѣмъ какое испытываемъ, стремясь произвести пустоту". Въ томъ же письмѣ Торричелли описываетъ опытъ, забываемый въ курсахъ физики, но имѣющій существенное значеніе. (Я не повиненъ: въ моемъ курсѣ опытъ приведенъ). Чашку, куда опущена барометрическая трубка, Торричелли наполнялъ поверхъ ртути водою, и трубку мало по малу подымалъ. Когда отверстіе трубки достигало воды ртуть опускалась и вода стремительно наполняла трубку всю, не оставляя вверху пустоты. Риччи, отвѣчая на письмо Торричелли, признавалъ, что опытъ побѣдоносно доказываетъ возможность пустоты въ природѣ, но принять объясненіе Торричелли не рѣшался, усматривая разныя трудности. Если закрыть чашку крышкою, ртуть не понижается въ трубкѣ, хотя надъ ртутью нѣтъ колонны воздуха, которая бы давила своимъ вѣсомъ. Если, закрывъ отверстіе ручного насоса (seringue), тянутъ поршень, то будетъ одинаково трудно какъ бы ни помѣстить насосъ: идетъ ли поршень кверху, имѣя надъ собою колонну воздуха, или идетъ книзу, когда такой колонны нѣтъ. Эти возраженія Риччи указываютъ, что представленія объ упругости воздуха и о распространеніи давленія у него не было. Такъ было не съ однимъ Риччи. Вообще представленіе давленія воздуха въ видѣ груза, сверху лежащаго и давящаго внизъ чрезвычайно препятствовало правильному воззрѣнію на атмосферное давленіе. Нерѣдко и нынѣ представленіе это не достаточно разъясняется учащимся.

Проф. *Н. Любимовъ.*

(Продолженіе слѣдуетъ).

Отвѣтъ на тему № 4, предложенную въ № 31 „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики" за 1887 годъ *).

Пусть ABC будетъ данный треугольникъ, стороны котораго a, b, c. Точка O пусть будетъ центръ круга, описаннаго около этого треугольника (фиг. 41). Задача заключается въ томъ, чтобы черезъ вершину B даннаго треугольника провести сѣкущую, длина которой была бы средней пропорціональной между отрѣзками основанія AD и DC. Для рѣшенія задачи описываемъ на OB, какъ на діаметрѣ, окружность. Если эта окружность пересѣчетъ сторону b въ точкахъ D и D′, то сѣкущія BD и BD′ будутъ искомыя.

Фиг. 41.

Въ самомъ дѣлѣ

$$BD=DE, \text{ а } BD.DE=AD.DC, \text{ отсюда } BD^2=AD.DC.$$

То же можно сказать и относительно другой сѣкущей BD′.

*) Тема № 4 была предложена въ слѣдующей формѣ. „Показать, что возможность проведенія черезъ вершину B даннаго треугольника сѣкущей BD, длина которой

Теперь изслѣдуемъ нашу задачу, поставивъ своею цѣлью отыскать такую зависимость между сторонами a, b и c, которою обусловливается возможность проведенія искомой сѣкущей.

Уголъ B въ треугольникѣ ABC можетъ быть тупымъ, прямымъ и острымъ.

Разсмотримъ простѣйшій случай, когда уголъ $B=90^0$.

Въ этомъ случаѣ сторона b должна проходить черезъ центръ 0 и служить діаметромъ этого круга (фиг. 42). Слѣдовательно, сторона b можетъ или пересѣкать кругъ, описанный на 0B, или касаться къ нему въ точкѣ 0.



Фиг. 42.

Во всякомъ случаѣ

$$b^2=a^2+c^2 \text{ и } a^2+c^2 \geqslant 2ac, \text{ откуда } b^2-2ac \geqslant 0.$$

Придадимъ къ лѣвой части этого неравенства нуль въ формѣ: $b^2-a^2-c^2$ и разложимъ ее на множители; получимъ

$$(b\sqrt{2}+a+c)\ (b\sqrt{2}-a-c) \geqslant 0.$$

Такъ какъ множитель $b\sqrt{2}+a+c$ положительный, то, слѣдовательно, и другой множитель долженъ быть положительнымъ, т. е.

$$b\sqrt{2}-a-c \geqslant 0 \text{ или } b\sqrt{2} \geqslant a+c.$$

Такова искомая зависимость. Мы видимъ, что задача допускаетъ два рѣшенія, когда изъ двухъ знаковъ $\geqslant$ имѣетъ мѣсто верхній, и одно рѣшеніе, когда нижній. Не трудно понять, что въ этомъ послѣднемъ случаѣ треугольникъ будетъ равнобедренный и сторона b будетъ касаться круга $0'$.

Все сказанное относится къ тому случаю, когда сторона b проходитъ черезъ 0; если же сторона b не будетъ проходить черезъ центръ 0, то она должна пересѣкать или самый радіусъ 0B, или его продолженіе.

Въ томъ случаѣ, когда сторона b пересѣкаетъ радіусъ 0B—уголъ B долженъ быть тупымъ; если же сторона b пересѣкаетъ продолженіе радіуса 0B или совсѣмъ его не пересѣкаетъ, то уголъ $B < 90^0$.

была бы среднею пропорціональной между отрѣзками основанія AD и DC (см. рѣшеніе задачи № 66 въ № 31 „Вѣстника“ стр. 163) сводится къ условію

$$b\sqrt{2} \geqslant a+c.$$

Разсмотрѣть случаи: 1) $\angle B > 90^0$, 2) $\angle B=90^0$ и 3) $\angle B < 90^0$ и въ этомъ послѣднемъ случаѣ найти предѣльное значеніе (minimum) для угла B, при которомъ проведеніе такой сѣкущей возможно.

Показать, что кромѣ внутренней сѣкущей (одной или двухъ) можетъ быть еще проведена внѣшняя сѣкущая (отъ вершины до пересѣченія съ продолженнымъ основаніемъ), удовлетворяющая условію, и разъяснить тотъ случай, когда она обращается въ безконечно-большую величину“.

Разсмотримъ первый случай.

Въ этомъ случаѣ сторона b обязательно пересѣкается съ кругомъ O' и непремѣнно въ двухъ точкахъ D и D' (фиг. 41). Зависимость между сторонами a, b и c можно найти на основанiи слѣдующихъ соображенiй.

Уголъ B тупой, поэтому

$$b^2 > a^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots (1),$$

но $(a-c)^2 \geqslant 0$ или $a^2+c^2 \geqslant 2ac$. . . . . (2)

Сравнивая неравенства (1) и (2), видимъ, что

$$b^2 > 2ac \ldots\ldots (3)$$

Складывая неравенства (1) и (3), найдемъ, что

$$2b^2 > a^2 + c^2 + 2ac, \text{ отсюда } b\sqrt{2} > a + c.$$

Это и есть искомая зависимость.

Разсмотримъ второй случай; уголъ B $< 90^0$ (фиг. 43). Пусть сторона b пересѣкаетъ кругъ O' въ двухъ точкахъ D и D', тогда сѣкущiя BD и BD' искомыя.

Продолжимъ BD до пересѣченiя съ окружностью радiуса OB въ точкѣ E и соединимъ E съ A и C.

Изъ треугольника ABE, въ которомъ AD медiана стороны BE, находимъ слѣдующее равенство.

$$2AD^2 + 2BD^2 = c^2 + AE^2 \ldots\ldots (4)$$

Фиг. 43.

Изъ треугольника CBE, въ которомъ CD медiана стороны BE, имѣемъ слѣдующее равенство:

$$2CD^2 + 2BD^2 = a^2 + EC^2 \ldots\ldots (5)$$

Сложимъ равенства (4) и (5):

$$2(AD^2+CD^2)+4BD^2=a^2+c^2+EC^2+AE^2 \ldots (6)$$

Но $AD+DC=b$, отсюда $AD^2+DC^2=b^2-2BD^2$.

Слѣдовательно уравненiе (6) можно представить въ такомъ видѣ:

$$2b^2=a^2+c^2+EC^2+AE^2 \ldots\ldots (7)$$

Докажемъ, что, $AE^2+EC^2 \geqslant 2ac$.

Изъ треугольниковъ ADE и DBC имѣемъ

$$AE : a = AD : BD \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Изъ треугольниковъ DEC и ADB найдемъ

$$EC : c = BD : AD \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (9)$$

Опредѣливъ изъ равенствъ (7) и (8) AE и EC и возвысивъ ихъ въ квадратъ, получимъ

$$AE^2 = a^2 \cdot \frac{AD}{DC} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (10); \quad EC^2 = c^2 \cdot \frac{DC}{AD} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (11)$$

Складывая равенства (10) и (11), будемъ имѣть

$$AE^2 + EC^2 = \frac{a^2 . AD}{DC} + \frac{c^2 . DC}{AD}.$$

Но $(a . AD - DC . c)^2 \geqslant 0$ или $a^2 . AD^2 + c^2 . DC^2 \geqslant 2ac . AD . DC$.

Раздѣливъ обѣ части этого неравенства на AD . DC, получимъ

$$\frac{a^2 . AD}{DC} + \frac{c^2 . DC}{AD} \geqslant 2ac,$$

а потому $AE^2 + EC^2 \geqslant 2ac$.

Равенство (7) можно представить теперь въ такомъ видѣ:

$$2b^2 \geqslant a^2 + c^2 + 2ac$$

или же $b\sqrt{2} \geqslant a + c$.

Неравенству $b\sqrt{2} > a + c$ соотвѣтствуютъ два рѣшенія: одна изъ сѣкущихъ будетъ BD, а другая BD′. Но по мѣрѣ того, какъ величины, входящія въ это неравенство будутъ стремиться къ равенству, уголъ B все будетъ уменьшаться и наконецъ достигнетъ своего предѣльнаго значенія при

$$b\sqrt{2} = a + c.$$

Докажемъ что въ этомъ случаѣ BD будетъ биссектрисой угла B и сторона b будетъ касаться къ кругу O′, причемъ точки D и D′ обѣ сольются съ точкою касанія.

Пусть въ треугольникѣ ABC (фиг. 44) сторона b касается круга O′ въ точкѣ D; покажемъ, что BD будетъ биссектриссой угла B.

Продолжимъ BD до пересѣченія съ окружностью радіуса OB въ точкѣ E, точку E соединимъ съ O и назовемъ точку пересѣнія прямой OE съ AC чрезъ G.

Прямоугольный треугольникъ BDO и треугольникъ ODG подобны, такъ какъ углы DBO и ODG измѣряются дугой DO, а уголъ DOB равенъ углу DOE потому что дуга BF равна дугѣ EF. Слѣдовательно $\angle BDO = \angle DGO = d$, а потому дуга AE = EC. Итакъ BD биссектриса угла B и задача имѣетъ одно рѣшеніе.

Фиг. 44.

Мы сказали, что уголъ B достигаетъ своего

предѣльнаго значенія, при которомъ проведеніе искомой сѣкущей возожмно, при

$$b\sqrt{2} = a + c.$$

Слѣдовательно, чтобы найти уголъ B построеніемъ нужно построить треугольникъ по сторонамъ a, c и $\frac{a+c}{\sqrt{2}}$

Но такой треугольникъ возможенъ лишь въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{a+c}{\sqrt{2}} < a+c;\ a < c + \frac{a+c}{\sqrt{2}};\ c < a + \frac{a+c}{\sqrt{2}}.$$

Первое неравенство всегда соблюдается; остальныя два неравенства можно представить въ слѣдующемъ видѣ

$$a < c(3+2\sqrt{2});\ a > c(3-2\sqrt{2})$$

$$\text{или же } 3+2\sqrt{2} > \frac{a}{c} > 3-2\sqrt{2}.$$

Такимъ образомъ если отношеніе $\frac{a}{c}$ заключается между $3+2\sqrt{2}$ и $3-2\sqrt{2}$, то треугольникъ возможенъ и уголъ, противолежащій сторонѣ $\frac{a+c}{\sqrt{2}}$, будетъ искомый. Въ противномъ случаѣ треугольникъ невозможенъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что задача допускаетъ два рѣшенія всякій разъ, когда

$$b\sqrt{2} > a+c,$$

одно рѣшеніе, когда

$$b\sqrt{2} = a+c.$$

и совсѣмъ не рѣшается, когда

$$b\sqrt{2} < a+c.$$

Это заключеніе относится ко внутреннимъ сѣкущимъ. Если же мы въ точкѣ B къ окружности радіуса OB проведемъ касательную и означимъ точку ея пересѣченія съ продолженіемъ стороны b чрезъ H, то

$$BH^2 = AH \cdot CH.$$

Отсюда должно заключить, что кромѣ внутренней сѣкущей, удовлетворяющей вопросу, существуетъ и внѣшняя. Проведеніе внѣшней сѣкущей возможно во всякомъ треугольникѣ. Однако въ томъ случаѣ, когда сторона b будетъ перпендикулярна къ діаметру, соединяющему вершину треугольника B съ центромъ круга, описаннаго около этого треугольника, тогда точка H отодвинется въ безконечность и сама сѣкущая будетъ имѣть величину безконечно большую.

Ученикъ VII класса Тамбовскаго Реальнаго Училища

Александръ Евсинеевъ.

Нѣсколько словъ по поводу открываемыхъ въ Одессѣ физико-математическихъ курсовъ.

Всѣ лица, заинтересованныя успѣхами физико-математическаго образованія въ нашей средней школѣ, конечно, искренно порадуются плодотворному почину Одесскаго учебнаго округа, выразившемуся въ организаціи физико-математическихъ курсовъ для подготовки учителей математики и физики. (См. № 161 „Вѣстника") Дай Богъ, чтобы эта въ своемъ родѣ единственная теперь попытка послужила первымъ зерномъ для развитія въ нашемъ отечествѣ спеціально педагогическаго образованія, недостатокъ котораго ощущается съ каждымъ годомъ все сильнѣе и сильнѣе.

Юристъ, техникъ, даже чиновникъ, прежде чѣмъ перейти къ самостоятельной дѣятельности проходятъ большею частью довольно суровую подготовительную школу, и никто не рѣшится поручить защиту рискованнаго дѣла только что испеченному кандидату и не позволятъ строить мостъ даже увѣнчанному медалью юному технологу. Нельзя безнаказанно портить гербовую бумагу и желѣзо, но можно невозбранно перепортить сколько угодно дѣтей. Употребляемое мною выраженіе, конечно, рѣзко, но оно близко соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Вспомнимъ, въ самомъ дѣлѣ, положеніе молодого учителя-математика, приступающаго къ преподаванію: голова его набита разными интегралами, дифференціалами, варіаціями и пр., а знаніе такъ называемой элементарной математики не выше гимназическаго: кое-что забылось, кое въ чемъ явились сомнѣнія; системы въ сознаніи можетъ быть и прежде не было, а теперь ужъ и подавно; въ результатѣ нѣчто весьма неопредѣленное и смутное. Если бы пришлось держать экзаменъ на аттестатъ зрѣлости, то сердитые педагоги, пожалуй, и зрѣлымъ бы не признали *).

Это сторона спеціальныхъ знаній. Другая, чисто педагогическая, еще хуже. Методика, дидактика — почти незнакомыя слова. Смутныя воспоминанія о школьномъ преподаваніи неясно рисуются на яркомъ фонѣ свѣжихъ впечатлѣній отъ профессорскихъ лекцій и всѣ симпатіи естественно склоняются къ послѣднимъ. Предо мною и сейчасъ, какъ живой, ученый мужъ, читающій краснорѣчивыя лекціи намъ, ученикамъ 3-го класса. О Боже мой, что это было!

Конечно при нѣкоторой дозѣ храбрости все это трынь-трава: „Мнѣ ли, ученому кандидату **), знакомому чуть не съ послѣднимъ словомъ

---

*) Если мнѣ возразятъ, что выборъ факультета обусловливается извѣстною склонностью, которая обезпечиваетъ и знаніе, и интересъ къ дѣлу, то я скажу, что это теоретическое разсужденіе далеко не всегда оправдывается въ дѣйствительности по причинамъ весьма разнообразнымъ.

**) Само собою разумѣется, что я имѣю въ виду не только кандидатовъ университета, а вообще всѣхъ лицъ съ высшимъ образованіемъ, не получившихъ педагогической подготовки.

науки, не справиться съ какой то ариѳметикой! Небольшая хитрость растолковать мальчишкамъ умноженіе чиселъ, оканчивающихся нулями". На этомъ иногда успокаиваются, и тогда наступаетъ царство винта.

Но, предоставивъ винтеровъ винту, вникнемъ въ положеніе человѣка, искренно желающаго поработать: онъ прежде всего хватается за учебники, но ихъ много, а разобраться въ нихъ не легко. Надо бы почитать разборы руководствъ, но они разбросаны въ періодическихъ изданіяхъ и найти ихъ трудно и не всегда возможно. Надо бы о многомъ прочитанномъ подумать, но некогда: дѣло не терпитъ. Надо бы прочитать что нибудь по методологіи, методикѣ, дидактикѣ, но если это и дѣлается, то въ карьеръ, а, слѣдовательно, почти безрезультатно. Подъ руками единственный возможный рессурсъ: посѣщеніе уроковъ другихъ преподавателей и бесѣды съ послѣдними и съ руководящими лицами. Но посѣщеніе уроковъ будетъ тогда только полезно, когди оно продолжительно и сопровождается надлежащими разъясненіями, а это бываетъ далеко не всегда по разнымъ причинамъ, достаточно хорошо извѣстнымъ лицамъ, знакомымъ съ нашею школою.

Словомъ можно утверждать съ большимъ основаніемъ, что въ громадномъ большинствѣ случаевъ молодой преподаватель въ первые года своей дѣятельности находится въ совершенныхъ потемкахъ, въ полномъ туманѣ вычитанныхъ идей, выслушанныхъ совѣтовъ и указаній, воспринятыхъ изъ личнаго опыта наблюденій.

Польза, приносимая такимъ преподавателемъ, весьма проблематична, а внутреннее состояніе его подчасъ бываетъ просто ужасно: онъ изверился въ свои силы, усталъ отъ безплодныхъ потугъ и впадаетъ въ совершенное отчаяніе.

Исходъ изъ этого положенія двоякій: въ худшемъ случаѣ дѣло ограничивается усвоенімъ внѣшней рутины; ученики попривыкнутъ къ учителю и подъ грозой единицъ съ горемъ пополамъ одолѣютъ курсы, а преподаватель, успокоенный благодѣтельнымъ временемъ, займется практическимъ изученіемъ теоріи винта; въ лучшемъ случаѣ—учитель, человѣкъ сильный, выбьется, конечно, на прямую дорогу, но и онъ оглянется на пройденный путь съ тяжелымъ чувствомъ: тамъ и жертвы его неумѣнья, и напрасно затраченныя хорошія усилія дѣтей, и его собственныя.

Хорошо организованные курсы могутъ въ значительной степени уничтожить всю эту тяжелую ломку, сократить или упразднить этотъ „тернистый путь"; добрыя усилія они направятъ по прямому пути; колеблющуюся волю укрѣпятъ; всякому дадутъ нѣкоторый багажъ элементарныхъ знаній и навыковъ; человѣку, неспособному къ педагогической дѣятельности, откроютъ глаза на предстоящее ему поприще и, быть можетъ, убѣдятъ его искать другихъ исходовъ.

Обращаясь къ разсмотрѣнію программы курсовъ, да позволено будетъ высказать нѣкоторыя пожеланія, быть можетъ отчасти предусматриваемыя и составителями программы. Кромѣ методики математики

желательно было бы ввести въ число изучаемыхъ предметовъ и методологію ея (съ философскимъ обоснованіемъ), разумѣется, только въ отношеніи элементарной математики. Нѣкоторыя сочиненія по этому поводу имѣются въ иностранной и даже въ русской литературѣ.

Изученіе учебниковъ не должно ограничиваться только одобренными министерствомъ руководствами.

Центромъ изученія по каждому отдѣлу полезно сдѣлать какое нибудь классическое сочиненіе, а другія изучать путемъ сравненія съ избраннымъ. Напримѣръ, по геометріи можно было бы рекомендовать критико-сравнительное изученіе „Началъ" Евклида. Въ связи съ изученіемъ учебниковъ должно идти ознакомленіе курсистовъ съ нашей критико-педагогической литературой по математикѣ и физикѣ, которая, хотя еще очень молода, однако имѣетъ за собой несомнѣнныя заслуги.

Часъ въ недѣлю можно было бы, кажется, удѣлить на изученіе исторіи математики, хотя бы въ объемѣ извѣстнаго курса *Klimpert*'а*), и это съ тѣмъ большимъ основаніемъ, что время, назначенное на технику гимназическаго курса физики, едва ли не слишкомъ велико.

Въ отношеніи общей постановки дѣла пожелаемъ возможно болѣе полнаго избѣжанія рутины, возможно широкаго простора личной индивидуальности. Припомнимъ кстати и помянемъ добрымъ словомъ бывшіе курсы при 2-й Петербургской военной гимназіи. Они безспорно сослужили военнымъ гимназіямъ большую службу и подлежатъ, кажется, единственному упреку за созданіе извѣстныхъ шаблоновъ, извѣстныхъ схемъ для уроковъ. Это шаблоны и схемы опасны въ особенности потому, что въ нихъ, какъ рука въ перчатку, удобно входитъ всякая бездарность, всякая лѣнивая или мало дѣятельная мысль.

М. Попруженко (Оренбургъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Къ вопросу о полученіи искусственныхъ алмазовъ. Читатели „Вѣстника Оп. Физики" знакомы уже съ опытами Moissan'а надъ полученіемъ алмазовъ**). Способъ Moissan'а основанъ на способности углерода выдѣляться изъ раствора въ металлѣ подъ сильнымъ давленіемъ въ формѣ алмаза. 4-го марта сего года въ засѣданіи Р. Ф. Химическаго Общества К. Д. Хрущовъ сдѣлалъ сообщеніе о своихъ опытахъ надъ приготовленіемъ алмазовъ. Прокаливая куминово-кислое серебро, докладчикъ получилъ углеродистое серебро Ag_2C, которое и служило для опытовъ. При температурѣ кипѣнія серебро растворяетъ до 6% углерода, выдѣляющагося изъ раствора при его охлажденіи отчасти въ формѣ

---

*) Указывая на этотъ курсъ, я имѣю въ виду только объемъ его.

**) См. „Вѣстникъ Оп. Физики", № 161, стр. 97.

алмаза, если охлажденіе производится быстро, такъ что на поверхности образуется кора, препятствующая расширенію заключеннаго внутри металла и обусловливающая сильное давленіе. Въ засѣданіи былъ демонстрированъ образецъ полученнаго такимъ образомъ алмаза и горѣніе его въ кислородѣ. Такъ какъ г. Хрущовъ показывалъ свой препаратъ алмаза Н. И. Бекетову на другой день послѣ полученія статьи Moissan'a, то онъ считаетъ себя вправѣ утверждать, что открытіе сдѣлано имъ независимо отъ Moissan'a.

Опыты надъ полученіемъ алмазовъ, были также произведены G. Friedel'емъ (C. R. 116, 224). Они интересны въ томъ отношеніи, что здѣсь алмазъ получается при сравнительно низкой температурѣ. Дѣйствуя долгое время сѣрой на чугунъ, содержащій до 4% угля, при температурѣ кипѣнія сѣры (440°) или при 500°, растворяя полученное сѣрнистое желѣзо и обрабатывая оставшійся уголь дымящейся сѣрной кислотой и бертолетовой солью, Friedel получилъ незначительное количество чернаго порошка, чертящаго корундъ. *В. Г.*

Объемный составъ воды. Въ засѣданіи Лондонскаго Королевскаго Общества 20-го апрѣля (н. с.) A. Scott сообщилъ результаты своихъ новыхъ опредѣленій объемнаго состава воды. Пользуясь кислородомъ изъ окиси серебра и водородомъ изъ водородистаго палладія, авторъ получилъ въ среднемъ изъ 47 опытовъ для объемнаго отношенія водорода къ кислороду значеніе 2,002466 ± 0,000003, что даетъ для атомнаго вѣса кислорода 15,862, если принять отношеніе плотностей, данное лордомъ Rayleigh'емъ. Раньше Ditmar и Henderson нашли 15,866, Cooke и Richards — 15,869, Laduc — 15,876; отношеніе плотности кислорода къ плотности водорода по Laduc'у = 15,905, а объемный составъ воды — 2,0037 : 1; Morley нашелъ 2,0023. *В. Г.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Фотографированіе красокъ, открытое Липманомъ, усовершенствовано фабрикантами чувствительныхъ пластинокъ Люмьеромъ и Дёльономъ. Имъ удалось при получасовой экспозиціи получить безукоризненные снимки видовъ различныхъ мѣстностей. Снимки эти были демонстрированы ими въ одномъ изъ послѣднихъ засѣданій французскаго фотографическаго общества и поразили присутствовавшихъ вѣрной передачей красокъ и естественностью тоновъ.

Русская десятичная система мѣръ. Указывая на все большее распространеніе метрической системы въ Россіи, проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскій выступаетъ въ послѣдней книжкѣ Журнала Русскаго Ф.-Химическаго Общества*) съ предложеніемъ ввести въ Россіи новую систему мѣръ, благодаря чему явится возможность сблизить наши мѣры съ метрическими и избѣжать того затрудненія, которое явилось-бы, если-бы

*) Ж. Ф. Х. О. XXV, 2. 91.

народу пришлось усваивать иностранныя названія мѣръ. Въ отличіе отъ нынѣ принятыхъ, новыя мѣры могутъ быть названы *казенными* и это названіе, конечно, придастъ имъ нѣкоторый вѣсъ въ глазахъ народа и облегчитъ ихъ распространеніе. Суть предложенія уважаемаго профессора ясна изъ слѣдующей таблицы.

Русская метрическая система. Названіе мѣръ.	Величина во франц. метрич. мѣрахъ.	Величина въ нынѣшнихъ русскихъ мѣрахъ.
Полусаженка казенная=20 **вершкамъ казеннымъ***)	1 метръ	1,4061 арш.
Вершокъ казенный	0,05 метр.=5 сант.	1,1248 вершк.
Сажень казенная, саженка=2 каз. полусаженкамъ	2 метра	0,9374 саж.
Верста казенная малая=500 каз. саж. . .	1 километръ	468,7 саж. 0,9374 верст.
Десятина каз., десятинка=2500 кв. саженамъ	1 гектаръ = 10000 кв. м.	0,9153 дес. 2196,8 кв. с.
Верста кв. каз.=100 десятинокъ . . .	1 кв. килом. = 100 гектар.	0,9651 кв. верст. 91,53 дес.
Кубикъ малый=куб. каз. полусаженкѣ .	1 куб. метръ	0,10296 куб. саж.
Кубикъ большой=10 кубикамъ малымъ .	10 куб. метр.	1,0296 куб. саж.
Ведерко=10 штофикамъ	10 литровъ	0,8131 ведр.
Штофикъ=10 стаканчикамъ	1 литръ	0,8131 штофа
Стаканчикъ**)	100 куб. сант.	—
Мѣра [redacted] (троегарнецъ или ведерко) .	10 литровъ	3,0490 грнц.
[redacted] **средняя**=10 мѣр. мал.	100 „	3,812 чтвт.
„ **большая**=10 мѣр. ср.=100 м.м. .	1000 [redacted]	4,795 чтвк.
Фунтъ большой казен.=100 б. золотн. .	500 гр.	1,221 ф.
Золотникъ большой	5 гр.	1,172 зол.
Граммъ***)	—	—
Двоефунтъ каз.=2 ф. б.	1 килогр.	2,441 ф.
Полупудъ большой=10 двоеф.	10 килогр.	24,41 „
Полуберковецъ большой=100 двоеф. .	100 „	6,105 пуд.
Тонна=1000 двоеф.	1000 „ (квинталъ).	61,05 „

*) Можно допустить *казенный аршинъ* въ 15 каз. вершковъ, = 75 сант.=1,054 арш., но онъ не содержится цѣлое число разъ въ казенной сажени.

**) Сороковка=1/40 нынѣш. ведра=3,025 стакана.

***) Можно допустить *казенный лотъ*=10 каз. золотникамъ.

ЗАДАЧИ.

№ 477. У крестьянъ нѣкоторыхъ мѣстностей (напр. близь Перми) существуетъ мѣра объемовъ, называемая *кучею*. Куча есть конусъ, коего образующая равняется одной сажени. Они полагаютъ, что объемъ кучи почти не зависитъ отъ высоты, если послѣднюю брать въ предѣлахъ отъ $1^1/_2$ до 2 аршинъ, и равняется половинѣ кубической сажени.— Показать, что объемъ кучи менѣе полусажени и найти измѣненіе ея объема въ зависимости отъ измѣненія высоты кучи отъ $1^1/_2$ до 2 аршинъ.

К. Тороповъ (Пермь).

№ 478. Рѣшить систему:

$$x^2 + y\sqrt{xy} = 420$$
$$y^2 + x\sqrt{xy} = 280.$$

С. Адамовичъ (Курскъ).

№ 479. Даны три параллельныя плоскости. Разстояніе между первою и второю равно m, между второю и третьею равно n. Опредѣлить ребро правильнаго тетраэдра, у котораго двѣ вершины расположены на средней плоскости, а остальныя двѣ — на крайнихъ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 480. Даны два концентрическіе шара. Радіусъ меньшаго равенъ r, а большаго R. Опредѣлить ребро правильнаго тетраэдра, у котораго одна вершина расположена на поверхности большаго шара, а остальныя три — на поверхности меньшаго.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 481. Построить треугольникъ ABC по углу B и по линіямъ AA_1 и CC_1, дѣлящимъ стороны BC и AB въ отношеніи $m:n$.

В. Ахматовъ (Тула).

№ 482. Описать двѣ окружности, касательныя къ сторонамъ даннаго угла A и пересѣкающіяся подъ прямымъ (или даннымъ) угломъ, если извѣстно, что сумма радіусовъ искомыхъ окружностей равна S. (См. зад. 472).

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 483. Въ вершинахъ правильнаго шестиугольника помѣщены массы, послѣдовательно равныя 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Опредѣлить положеніе центра тяжести системы, образованной этими массами.

(Заимств.) *В. Г.* (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 361 (2 сер.). Одну дѣвицу спросили сколько ей лѣтъ. „Я родилась 6-го сентября, — отвѣтила она — а въ текущемъ (1892 г.) году праздновала свое рожденіе 1-го августа, но замѣтьте, что я праздную не годовщину рожденія, а тысячедневіе. Это удобнѣе. Угадайте же, сколько мнѣ лѣтъ".

Съ 6-го сентября по 31-е декабря включительно — 117 дней, съ начала 1892 г. по 1-е августа — 213 дней; если, слѣдовательно, назовемъ число полныхъ годовъ, прожитыхъ дѣвицей до перваго високоснаго года, черезъ x, и — начиная съ этого високоснаго года до начала 1892 г. — число четырехлѣтій, по 1461 день въ каждомъ, черезъ y, то будемъ имѣть:

$$117 + 365 . x + 1461 . y + 213 = 1000 . n,$$

гдѣ n число цѣлое. Или

$$365x + 1461y + 330 = 1000 . n \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

По обозначенію, x можетъ имѣть только значенія: 0, 1, 2 и 3. При $x=0$, уравненіе (1) даетъ наименьшее значеніе $y=470$, что по условію задачи немыслимо. При $x=1$, находимъ $y=5$, 1005, 2005, ..., изъ коихъ лишь первое значеніе даетъ отвѣтъ на предложенный вопросъ. При $x=2$, наименьшее изъ значеній y есть 540, а при $x=3$, имѣемъ: для y рядъ значеній: 75, 1075, 2075, ... Ни одно изъ нихъ не удовлетворяетъ условіямъ задачи, ибо не могла же дѣвица жить напр. три столѣтія съ лишнимъ (при $y=75$, $n=111$). Итакъ, имѣя одно лишь возможное рѣшеніе: $x=1$, $y=5$, $n=8$, находимъ, что дѣвица родилась 6 сентября 1870 года.

Б. Лебедевъ, М. Абрамовъ (Житоміръ); *А. Рѣзновъ* (Самара); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *С. Высоцкій* (Варшава).

№ 362 (2 сер.). Дано, что $mn+pq$ дѣлится на $m-p$. Доказать, что $mq+np$ тоже раздѣлится.

1. $$\frac{mn+pq}{m-p} = n + \frac{p(q+n)}{m-p},$$

т. е. $p(q+n)$ дѣлится на $m-p$, но такъ какъ

$$\frac{mq+np}{m-p} = q + \frac{p(q+n)}{m-p},$$

то очевидно, что $mq+np$ дѣлится на $m-p$.

2. Вычитая $mq+np$ изъ $mn+pq$, получимъ $(m-p)(n-q)$, а такъ какъ уменьшаемое $mn+pq$ дѣлится на $m-p$, то должно дѣлится и вычитаемое $mq+np$.

М. Акопянцъ, О. Озаровская (Спб.); *К. Капріелли, П. Ивановъ* (Одесса); *А. Васильева, С. Бабанская* (Тифлисъ); *А. Рѣзновъ* (Самара); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *С. Высоцкій* (Варшава); *В. Шидловскій* (Полоцкъ); *А. Герасимовъ* (Кременчугъ); *А. П.* (Пенза); *В. Шишаловъ* (Иван.-Вознесенскъ); *Б. Лебедевъ* (Житоміръ).

№ 363 (2 сер.). *a*) Изъ двухъ точекъ A и B, взятыхъ внѣ окружности, проведены касательныя AC и BD по разныя стороны прямой AB. Доказать, что прямая AB въ точкѣ пересѣченія съ прямой CD раздѣлится на части, прямо пропорціональныя касательнымъ AC и BD.

b) Доказать, основываясь на предыдущей теоремѣ, что діагонали описаннаго около круга четыреугольника и прямыя, соединяющія точки касанія противоположныхъ его сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

a) Проведемъ BN ∥ CD до пересѣченія съ AC въ точкѣ N; очевидно $AO:OB=AC:CN$, а такъ какъ $CN=BD$, то $AO:OB=AC:BD$.

b) Пусть діагонали описаннаго около круга четыреугольника $AA'BB'$ пересѣкаются въ точкѣ O. Пусть точки касанія сторонъ AA', $A'B$, BB', $B'A$ будутъ соотвѣтственно C', D, D', C. На основаніи доказанной теоремы можемъ сказать, что CD дѣлитъ AB въ томъ же отношеніи, въ какомъ $C'D'$ дѣлитъ CD, т. е. точка пересѣченія CD и $C'D'$ лежитъ на AB. Повторя то же по отношенію къ линіи $A'B'$, получимъ требуемое доказательство.

А. Рѣзновъ (Самара); *В. Шишаловъ* (Ив.-Вознес); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *С. Высоцкій* (Варшава); *И. Трипольскій*, *Н. Николаевъ* (Пенза); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ).

№ 364 (2 сер.). Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу.

„Для измѣренія высоты башни на горизонтальной плоскости, проходящей черезъ ея основаніе, были назначены три доступныя точки A, B и C, причемъ точка A лежала прямо на сѣверъ, а точка B — на западъ отъ C. Угловая высота верхушки башни при точкахъ A и B равна 45^0, а угловая высота при точкѣ C равна 60^0. Зная, что $AC=b$, $BC=a$, найти высоту башни.

Пусть 0—основаніе башни, а высоту башни обозначимъ черезъ x. Очевидно $A0=B0=x$, а $C0=x:\sqrt{3}$. Опустимъ изъ A и B перпендикуляры AM и BN на OC. Такъ какъ $\triangle AMC \infty \triangle BNC$, то $AM:CM=CN:BN$, или

$$AM\,.\,BN=CM\,.\,CN\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Но

$$\overline{A0}^2=\overline{AC}^2+\overline{CO}^2+2CO\,.\,CM\,,\text{ или } x^2=b^2+\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{\sqrt{3}}\,.\,CM\,;$$

$$\overline{BO}^2=\overline{BC}^2+\overline{CO}^2+2CO\,.\,CN\,,\text{ или } x^2=a^2+\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{\sqrt{3}}\,.\,CN\,,$$

откуда

$$CM-CN=\frac{\sqrt{3}}{2x}(a^2-b^2)\;.\;.\;.\;.\;(2).$$

Такъ какъ сумма площадей AOC, BOC и ABC равна площади AOB, то

$$AM\,.\,OC+BN\,.\,OC+AC\,.\,BC=\sqrt{(a^2+b^2)\left(x^2-\frac{a^2+b^2}{4}\right)},$$

откуда легко получимъ

$$AM+BN=\frac{\sqrt{3}}{x}\left[\sqrt{(a^2+b^2)\left(x^2-\frac{a^2+b^2}{4}\right)}-ab\right] \quad . \quad . \quad (3).$$

Такъ какъ $\overline{CM}^2=b^2-\overline{AM}^2$ и $\overline{CN}^2=a^2-\overline{BN}^2$, то

$$\overline{CM}^2+\overline{CN}^2=a^2+b^2-\overline{AM}^2-\overline{BN}^2,$$

а отнимая отсюда равныя величины $2CM.CN$ и $2AM.BN$ (1), найдемъ:

$$(CM-CN)^2=a^2+b^2-(AM+BN)^2.$$

Замѣняя здѣсь $CM-CN$ и $AM+BN$ найденными раньше для нихъ выраженіями (2) и (3), легко приведемъ это уравненіе къ биквадратному

$$4(a^2+b^2)x^4-36a^2b^2x^2+9a^2b^2(a^2+b^2)=0,$$

изъ котораго и опредѣлимъ x.

А. П. (Пенза); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 365 (2 сер.). Построить треугольникъ по данной сторонѣ $BC=a$, высотѣ h_a, на нее опущенной, при условіи, что другая высота h_b равна сторонѣ AC, на которую она опущена.

Такъ какъ изъ условія задачи слѣдуетъ, что $h_b^2=b^2=ah_a$, то, построивъ среднюю пропорціональную между a и h_a, приведемъ задачу къ простой задачѣ построенія $\triangle$—а по a, h_a и b, которая въ общемъ случаѣ имѣетъ два рѣшенія.

А. Рѣзновъ (Самара); *В. Шишаловъ*, *В. Баскаковъ* (Ив. Вознесенскъ); *С. Луневскій*, (Москва); *П. Писаревъ*, *К. Щиголевъ* (Курскъ); *С. Высоцкій* (Варшава); *С. Бабанская*, *К. Исаковъ* (Тифлисъ); *В. Херувимовъ* (Харьковъ); *А. П.* (Пенза); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *К. Капріелли* (Одесса); *А. Кофманъ*.

№ 366 (2 сер.). Прямая раздѣлена на двѣ части, пропорціональныя сторонъ квадрата и его діагонали. Показать, что большая часть есть средняя гармоническая между прямой и меньшей ея частью.

Пусть меньшая часть $=x$; тогда большая $=x\sqrt{2}$. Требуется доказать, что

$$x\sqrt{2}=\frac{2x^2(1+\sqrt{2})}{x(2+\sqrt{2})};$$

сокращая на x, получимъ

$$\sqrt{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}, \text{ т. е. } 2\sqrt{2}+2=2+2\sqrt{2}.$$

В. Шидловскій (Полоцкъ); *А. Герасимовъ* (Кременчугъ); *А. П.* (Пенза); *В. Буханцевъ* (Борисоглѣбскъ); *В. Шишаловъ* (Ив.-Вознес.); *К. Капріелли* (Одесса); *А. Рѣзновъ* (Самара); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *С. Высоцкій* (Варшава).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 5-го Іюня 1893 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.